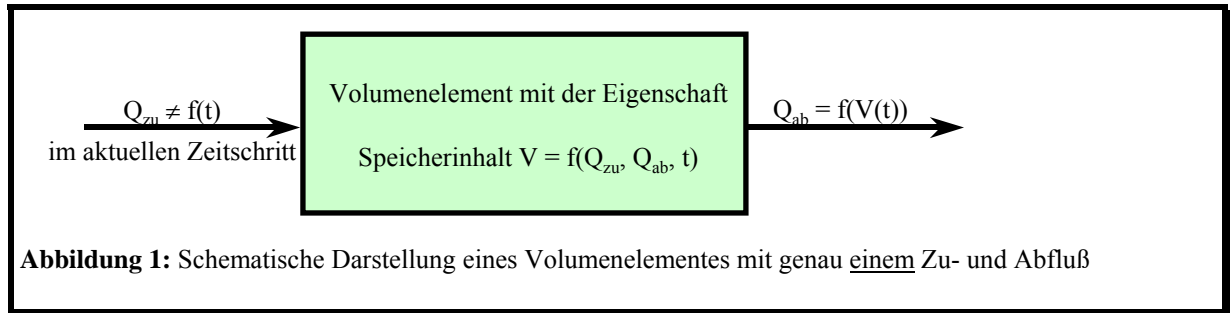


Mathematische Herleitung des hydrologischen Speicherkonzeptes für lineare und bereichsweise lineare Übertragungsfunktionen



1 Linearer Einzelspeicher

Ausgehend von der Kontinuitätsgleichung für das oben schematisch dargestellte Volumenelement (Speicher) mit einem Zufluß Q_{zu} , der im betrachteten Zeitintervall als konstant angesehen wird:

$$\frac{dV(t)}{dt} = Q_{zu} - Q_{ab}(V(t)) \quad (1)$$

und dem Ansatz für Q_{ab} :

$$Q_{ab}(t) = k \cdot V(t) \quad (2)$$

ergibt sich die Arbeitsgleichung:

$$\frac{dV(t)}{dt} = Q_{zu} - k \cdot V(t) \quad (3)$$

und nach Trennung der Veränderlichen:

$$dt = \frac{dV}{Q_{zu} - k \cdot V(t)} \quad (4)$$

Die Integration liefert:

$$t = -\frac{1}{k} \cdot [\ln(Q_{zu} - k \cdot V(t))] + C \quad (5)$$

Aus der Anfangsbedingung $V(t=t_0) = V_0$ folgt für die Integrationskonstante C:

$$C = t_0 + \frac{1}{k} \cdot [\ln(Q_{zu} - k \cdot V_0)] \quad (6)$$

Nach Einsetzen und folgenden Umformungen:

$$\begin{aligned} (t - t_0) &= -\frac{1}{k} \cdot [\ln(Q_{zu} - k \cdot V(t))] + \frac{1}{k} \cdot [\ln(Q_{zu} - k \cdot V_0)] \quad \Leftrightarrow \\ (-k) \cdot (t - t_0) &= \ln \left[\frac{Q_{zu} - k \cdot V(t)}{Q_{zu} - k \cdot V_0} \right] \quad \Leftrightarrow \\ k \cdot V(t) &= Q_{zu} - (Q_{zu} - k \cdot V_0) \cdot e^{-k \cdot (t - t_0)} \end{aligned} \quad (7)$$

ergibt sich die folgende Gleichung für das Speichervolumen als Funktion der Zeit:

$$V(t) = \frac{Q_{zu}}{k} \cdot [1 - e^{-k \cdot (t - t_0)}] + V_0 \cdot e^{-k \cdot (t - t_0)} \quad (8)$$

In dieser Gleichung beschreibt der erste Summand die Volumenänderung aufgrund einer Belastung im Intervall $(t-t_0)$, der zweite Summand beschreibt das Auslaufverhalten im gleichen Intervall ausgehend von einem Anfangsvolumen V_0 .

Mit Hilfe der Gleichung 2 (linearer Ansatz für den Abfluß aus dem Speicher) läßt sich nun für jeden Zeitpunkt t ein $Q_{ab}(t)$ bestimmen.

$$Q_{ab}(t) = Q_{zu} \cdot [1 - e^{-k \cdot (t - t_0)}] + V_0 \cdot k \cdot e^{-k \cdot (t - t_0)} \quad (9)$$

Häufig wird nun ein $Q_{ab}(t_0)$ und ein $Q_{ab}(t)$ berechnet, aus beiden Werten das arithmetische Mittel gebildet und mit der Zeitschrittlänge multipliziert, um das im Intervall $(t-t_0)$ abgeflossene Volumen zu ermitteln. Da die Funktionsgleichung für $V(t)$ aber offensichtlich nichtlinearen Charakter hat, führt diese Berechnungsmethodik zwangsweise in Relation zur gewählten Zeitschrittlänge zu mehr oder minder großen Fehlern in der Volumenbilanz. Zur korrekten Berechnung der Volumenbilanz sind einige weitere mathematische Umformulierungen notwendig.

Die korrekte Funktion $V_{ab}(t)$ kann durch Integration von Gleichung 9 bestimmt werden:

$$V_{ab}(t \rightarrow t_1) = \int_t^{t_1} Q_{ab}(t) dt = Q_{zu} \cdot \left[t + \frac{1}{k} \cdot e^{-k \cdot (t - t_0)} \right] - V_0 \cdot e^{-k \cdot (t - t_0)} + C \quad (10)$$

Mit der Bedingung $V_{ab}(t=t_1) = V_{ab1}$ ergibt sich für die Integrationskonstante C:

$$C = V_{ab1} - Q_{zu} \cdot \left[t_1 + \frac{I}{k} \cdot e^{-k \cdot (t_1 - t_0)} \right] - V_0 \cdot e^{-k \cdot (t_1 - t_0)} \quad (11)$$

und schließlich für $V_{ab}(t)$:

$$V_{ab}(t) = V_{ab1} + Q_{zu} \cdot \left[(t - t_1) + \frac{I}{k} \cdot (e^{-k \cdot (t - t_0)} - e^{-k \cdot (t_1 - t_0)}) \right] - V_0 \cdot [e^{-k \cdot (t - t_0)} - e^{-k \cdot (t_1 - t_0)}] \quad (12)$$

Meistens ist nur Sonderfall $t_0=t_1$ von Interesse, so daß sich Gleichung 12 vereinfacht zu:

$$V_{ab}(t) = V_{ab0} + Q_{zu} \cdot \left[(t - t_0) + \frac{I}{k} \cdot (e^{-k \cdot (t - t_0)} - I) \right] - V_0 \cdot [e^{-k \cdot (t - t_0)} - I] \quad (13)$$

Abschließend wird als abgeflossenes Volumen $\Delta V_{ab} = V_{ab}(t_2) - V_{ab0}$ im Zeitintervall $\Delta t = t_2 - t_0$ definiert und Gleichung 13 kann wie folgt vereinfacht angeschrieben werden:

$$\Delta V_{ab} = Q_{zu} \cdot \Delta t + \left(\frac{Q_{zu}}{k} - V_0 \right) \cdot [e^{-k \cdot \Delta t} - I] \quad (14)$$

Gleichung 14 ist die exakte Lösung (d.h. kein Fehler in der Volumenbilanz) für das in einem Zeitschritt Δt abgeflossene Volumen aus einem linearen Einzelspeicher. Durch Quotientenbildung ist nun die mittlerer Abflußintensität für dieses Δt ermittelbar.

$$\overline{Q_{ab}} = \frac{\Delta V_{ab}}{\Delta t} \quad (15)$$

2 Bereichsweise linearer Einzelspeicher

2.1 Berücksichtigung von einem Prozeß

Bei vielen hydrologischen Fragestellungen ist die Abstraktion des eigentlichen Problems in einen linearen Einzelspeicher mit konstanten Eigenschaften über den Bilanzierungszeitraum und dem veränderlichen Volumen des Speichers selbst nicht ausreichend genau. Bei der Ermittlung der Volumen-Abfluß-Beziehung in einer Vorberechnung wird im Regelfall ein nicht-linearer Verlauf festgestellt werden.

Beispiel: Abfluß aus einer Öffnung

$$Q_{ab} = f(\sqrt{h}) \text{ und } V = f(h) \Rightarrow \text{Nichtlinearität}$$

Um diese nichtlinearen Übertragungseigenschaften besser abbilden zu können, muß der Ansatz des linearen Einzelspeichers (siehe Gleichung 2) erweitert werden. Hierbei tritt allerdings ein mathematisches Problem auf.

Mit einem Ansatz der Form:

$$Q_{ab} = f(V, t, x, y, z) \quad (16)$$

an Stelle von Gleichung 2 ergibt sich nach Einsetzen in die Kontinuitätsgleichung im Regelfall eine Differentialgleichung, die nicht geschlossen lösbar ist und somit den Einsatz von numerischen Lösungsverfahren erforderlich machen würde. Gerade dies soll allerdings vermieden werden, um nicht den wesentlichen Vorteil des hydrologischen Speicherkonzeptes - nämlich geschlossene

Lösbarkeit der entstehenden Gleichungssysteme mit den entsprechenden Vorteilen *Stabilität* und *Schnelligkeit* - im Vergleich zu beispielsweise hydrodynamischen Berechnungsverfahren zu verlieren.

Aus diesem Grund scheint der Versuch naheliegend nichtlineare Funktionen durch einen bereichsweise linearen Polygonzug, *eine Kennlinie*, zu ersetzen, für dessen Teilabschnitte die Lösung durch Modifikationen des oben vorgestellten Speichers berechnet werden können.

Allgemein gilt folgender Ansatz:

$$Q_{ab}(t) = k(V) \cdot V(t) \quad (17)$$

Allerdings käme es zu Fehlern in der Volumenbilanz, wenn man diesen Ansatz ohne Beachtung der jeweiligen "Vorgeschichte" auf den aktuellen Teilbereich anwenden würde. Vielmehr ist strikt darauf zu achten, daß der Polygonzug abschnittsweise abgearbeitet wird. Dies wird durch den nachfolgend erläuterten Ansatz sichergestellt.

Nach Abbildung 2 gilt für $Q_{ab}(t)$:

$$Q_{ab}(t) = Q_{ab2} + k_3 \cdot (V(t) - V_2) \quad (18)$$

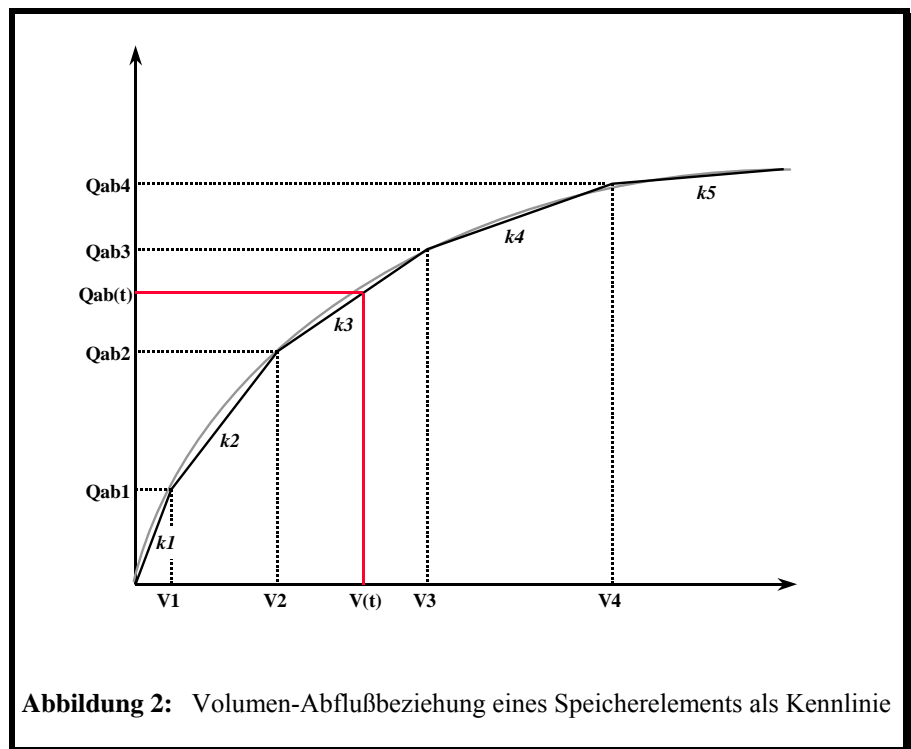


Abbildung 2: Volumen-Abflußbeziehung eines Speicherelements als Kennlinie

Verallgemeinerung durch Einführung des Indexes i führt zu:

$$Q_{ab}(t) = Q_{ab,i-1} + k_i \cdot (V(t) - V_i) \quad (19)$$

Die Ausmultiplikation von Gleichung 19 ermöglicht die Zerlegung in einen im aktuellen Zeitintervall konstanten und einen vom Speichervolumen V abhängigen Anteil:

$$Q_{ab}(t) = \underbrace{Q_{ab,i-1} - k_i \cdot V_{i-1}}_{\text{konstant}} + \underbrace{k_i \cdot V(t)}_{f(t)} \quad (20)$$

Einsetzen in die Kontinuitätsgleichung (1) liefert die folgende Arbeitsgleichung:

$$\frac{dV}{dt} = \underbrace{Q_{zu} - Q_{ab,i-1} + k_i \cdot V_{i-1}}_{\text{konstant} \Rightarrow \text{CON}} - \underbrace{k_i \cdot V(t)}_{f(t)} \quad (21)$$

Durch jeweilige Neuberechnung des konstanten Anteils im aktuellen Zeitintervall kann Gleichung 21 durch Substitution in Gleichung 3 überführt werden. Da Gleichung 3, wie oben gezeigt, geschlossen lösbar ist, läßt sich das in einem Intervall Δt abgeflossene Volumen ΔV_{ab} mittels Gleichung 22 analog zu Gleichung 14 berechnen zu:

$$\Delta V_{ab} = \text{CON} \cdot \Delta t + \left(\frac{\text{CON}}{k_i} - V_0 \right) \cdot [e^{-k_i \cdot \Delta t} - 1] \quad (22)$$

Der mittlere Abfluß im Zeitintervall wird analog zu Gleichung 15 durch Quotientenbildung aus ΔV_{ab} und Δt ermittelt.

Probleme bei diesem Ansatz entstehen, sobald aufgrund der ermittelten Speicherinhaltsänderung eine Bereichsgrenze für die Gültigkeit der Retentionskonstanten k_i erreicht bzw. überschritten wird, da dieser Zeitpunkt in der Regel nicht mit der gewählten äußeren Zeitschrittweite zusammen paßt. Aus diesem Grund muß intern mit variablen Zeitschritten gerechnet werden, deren Größe an die jeweiligen Bereichsüberschreitungen angepaßt werden muß. Zur Berechnung der Dauer bis zur jeweiligen Bereichsänderung kann Gleichung 8 verwendet werden.

Nach Ersetzen von Q_{zu} durch den in Gleichung 21 eingeführten Term CON wird Gleichung 8 zu:

$$V(t) = \frac{\text{CON}}{k} \cdot [1 - e^{-k \cdot (t-t_0)}] + V_0 \cdot e^{-k \cdot (t-t_0)} \quad (23)$$

Das aktuelle Volumen am Bereichswechsel (BW) zur Zeit t_{BW} sei V_{BW} :

$$V_{BW} = \frac{\text{CON}}{k} \cdot [1 - e^{-k \cdot (t_{BW} - t_0)}] + V_0 \cdot e^{-k \cdot (t_{BW} - t_0)} \quad (24)$$

Durch Umformung von Gleichung 24 kann der Zeitpunkt t_{BW} des Bereichswechsels berechnet werden:

$$t_{BW} = -\frac{I}{k} \cdot \ln \left[\frac{V_{BW} - \frac{CON}{k}}{V_0 - \frac{CON}{k}} \right] + t_0 \quad (25)$$

Für die verbleibende – also noch abzuarbeitende Zeit t_{Rest} – im aktuellen Zeitschritt folgt:

$$t_{Rest} = \Delta t - t_{BW} = t - t_0 - t_{BW} \quad (26)$$

Mit dieser Methode wird der äußere Zeitschritt durch eine beliebige, von der Dichte der Kennlinienstützstellen abhängige, Anzahl von internen Zeitschritten, komplett abgearbeitet. Die bei den internen Zeitschritten berechneten einzelnen Volumenänderungen $\Delta V_{ab,t}$ werden aufsummiert und der mittlere Abfluß durch die Gleichung 27 ermittelt.

$$\overline{Q_{ab}} = \frac{\sum \Delta V_{ab,t}}{\Delta t} \quad (27)$$

Durch die oben beschriebene Lösungsmethode ist die Berücksichtigung von nichtlinearen Übertragungsfunktionen für hydrologische Speicherkonzepte ohne Volumenfehler möglich. Dies ermöglicht z.B. bei der Simulation von Transportprozessen in geschlossenen Kreisrohren die exakte Berücksichtigung der Teilfüllungskurve anstelle einer aus dem mittleren Bereich abgeleiteten linearen Übertragungsfunktion (Ergebnisvergleich siehe Kapitel Beispiele).

2.2 Berücksichtigung von mehreren Prozessen

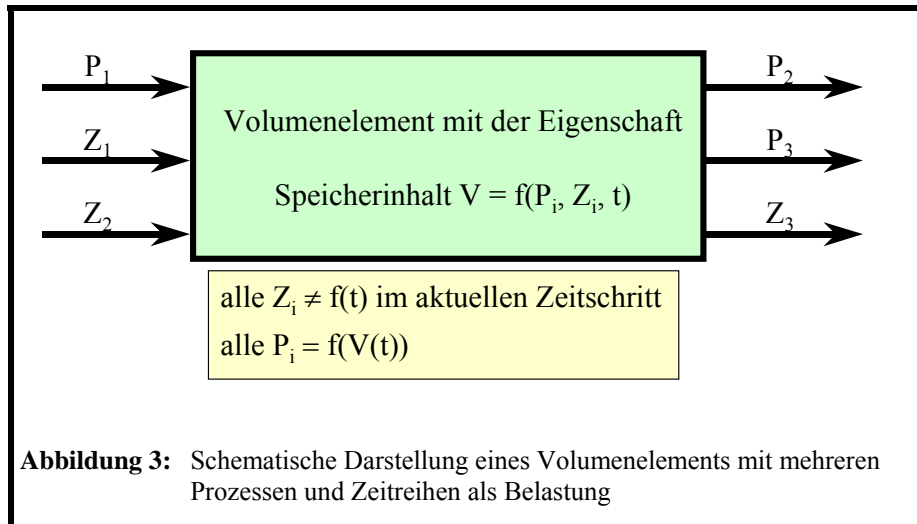
Die in 2.1 beschriebene Methodik bezieht sich auf den einfachen Fall, daß zu dem Speicher genau ein Zufluß und genau ein Abfluß aus ihm heraus stattfinden. Darauf aufbauend wird nachfolgend ein Verfahren hergeleitet, bei dem mehrere Volumenströme, die entweder vom Speicherinhalt unabhängig sind - im weiteren Verlauf werden diese als *Zeitreihen* bezeichnet - oder als Funktion des Speicherinhalts darstellbar sind - diese werden *Prozesse* genannt. Bei dem in 2.1 dargestellten Fall ist der Zufluß unabhängig vom Speicherinhalt – also eine *Zeitreihe* – und der Abfluß eine Funktion des Speicherinhalts – ein *Prozeß*.

Ein Speicher, der durch mehrere Prozesse, bzw. Zeitreihen belastet wird, läßt sich schematisch wie in Abbildung 3 darstellen.

Die Kontinuitätsgleichung für ein solches Element lautet:

$$\frac{dV(t)}{dt} = Z_1 + Z_2 - Z_3 + P_1(V(t)) - P_2(V(t)) - P_3(V(t)) \quad (28)$$

(Bei den folgenden mathematischen Umformungen werden die funktionalen Zusammenhänge nicht mehr explizit in den Formeln angegeben, da sie durch die gewählten Bezeichnungen eindeutig sind.)

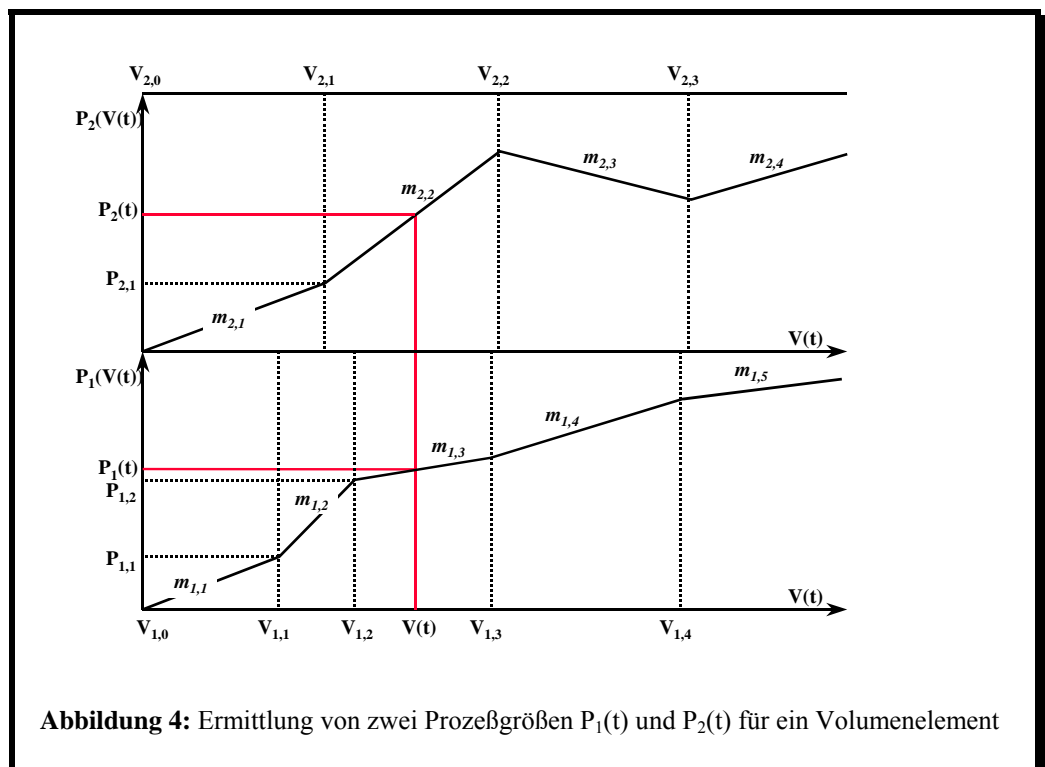


Die Terme Z_i sind im aktuellen Zeitschritt unabhängig vom Speichervolumen V und somit vor der weiteren Berechnung aufsummierbar:

$$\frac{dV(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n_Z} Z_i + P_1 - P_2 - P_3 \quad (29)$$

Mit einem Ansatz nach Abbildung 4 können alle Prozesse P_j in Abhängigkeit vom Speicherinhalt V beschrieben werden. Zur Vermeidung von Volumenfehlern bei der Auswertung der Formeln gilt analog zu 2.1, daß bei der Auswertung der Volumen/Prozeß-Beziehungen darauf zu achten ist, die Prozeßkennlinien stützstellenweise abzarbeiten.

In Abbildung 4 sind für zwei Prozesse die Volumen/Prozeß-Beziehungen aufgetragen, die reale nichtlineare Zusammenhänge durch Polygonzüge ersetzen und somit den Speicher in unterschiedliche Bereiche unterteilen. In jedem dieser Bereiche hat ein durch zwei Stützstellen begrenztes Geradenstück eine bestimmte Steigung $m_{j,k}$. Jeder der Pro-



Prozesse $P_j(V(t))$ kann nun analog zu Gleichung 18 wie folgt beschrieben werden.

$$P_j(V(t)) = P_{j,k-1} + m_{j,k} \cdot (V(t) - V_{j,k-1}) \quad (30)$$

Durch Ausmultiplizieren können aus Gleichung 30 ein im Zeitschritt von $V(t)$ abhängiger und ein konstanter Anteil unterschieden werden:

$$P_j(V(t)) = \underbrace{(P_{j,k-1} - m_{j,k} \cdot V_{j,k-1})}_{\text{konstant}} + \underbrace{m_{j,k} \cdot V(t)}_{f(t)} \quad (31)$$

Zur weiteren Auswertung erfolgt eine getrennte Aufsummierung der konstanten und der vom Speichervolumen V abhängigen Anteile in Gleichung 31 für alle Prozesse über die Laufvariable j .

$$\sum_{j=1}^{n_p} P_j = \sum_{j=1}^{n_p} (P_{j,k-1} - m_{j,k} \cdot V_{j,k-1}) + \sum_{j=1}^{n_p} m_{j,k} \cdot V(t) \quad (32)$$

Eingesetzt in die Kontinuitätsgleichung folgt:

$$\frac{dV}{dt} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n_z} Z_i + \sum_{j=1}^{n_p} (P_{j,k-1} - m_{j,k} \cdot V_{j,k-1})}_{C1} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n_p} m_{j,k} \cdot V(t)}_{C3} \quad (33)$$

Somit ist bis auf das Vorzeichen vor dem von der Zeit abhängigen Term wiederum eine vollständige Analogie zur Kontinuitätsgleichung des linearen Einzelspeichers (3) hergestellt. Mit der Beziehung $C3 = -C2$ und Substitution folgt aus Gleichung 33:

$$\frac{dV}{dt} = C1 - C2 \cdot V(t) \quad (34)$$

mit der bekannten Lösung:

$$V(t) = \frac{C1}{C2} \cdot [1 - e^{-C2 \cdot (t-t_0)}] + V_0 \cdot e^{-C2 \cdot (t-t_0)} \quad (35)$$

Zur korrekten Erfassung der Vorzeichen muß sowohl bei den Zeitreihen als auch bei den Prozessen die Konvention *Zulauf* \Leftrightarrow *positiv* und *Ablauf* \Leftrightarrow *negativ* eingehalten werden. Bei der Aufsummation ergibt sich auf diese Art automatisch, ob im betrachteten Intervall insgesamt eine Speicherinhaltszunahme oder -abnahme erfolgt.

Um die Prozessrate zu einem bestimmten Zeitpunkt t zu erhalten, reicht es aus Gleichung 34 zu lösen und dann mit dem aktuellen $V(t)$ und Hilfe der Gleichung 30 die aktuelle Prozessrate $P_j(V(t))$ zur ermitteln. Bei dieser Berechnung stellt sich aber nun das gleiche Problem wie beim linearen Einzelspeicher. Die einfache arithmetische Mittelung zwischen 2 Punkten auf der resultierenden Ganglinie $P_j(t)$ führt zwangsläufig zu einem Volumenfehler.

Es besteht natürlich prinzipiell die Möglichkeit die Zeitschrittlänge so kurz zu wählen, daß der Fehler vernachlässigbar wird; was allerdings für praktische Zwecke ein eher ungeeignetes Mittel darstellt. Besser ist es, wie auch schon beim linearen Einzelspeicher, eine nochmalige Integration durchzuführen. Da diese Integration nicht unbedingt trivial ist, wird sie an dieser Stelle noch einmal in Kürze durchgeführt.

Auflösen von Gleichung 30 nach $V(t)$ liefert:

$$V(t) = \frac{P_j(V(t)) - P_{j,k-1}}{m_{j,k}} + V_{j,k-1} \quad (36)$$

Eingesetzt in Gleichung 35 folgt:

$$\frac{P_j(V(t)) - P_{j,k-1}}{m_{j,k}} + V_{j,k-1} = \frac{CI}{C2} \cdot [I - e^{-C2 \cdot (t-t_0)}] + V_0 \cdot e^{-C2 \cdot (t-t_0)} \quad (37)$$

und nach der interessierenden Größe $P_j(V(t))$ aufgelöst:

$$P_j(V(t)) = \left[\frac{CI}{C2} \cdot [I - e^{-C2 \cdot (t-t_0)}] + V_0 \cdot e^{-C2 \cdot (t-t_0)} - V_{j,k-1} \right] \cdot m_{j,k} + P_{j,k-1} \quad (38)$$

Die mittlere Prozeßrate in einem Zeitintervall $[t_0, t_1]$ wird durch Integration von Gleichung 38 ermittelt:

$$\overline{P_j(t_0 \rightarrow t_1)} = \frac{I}{t_1 - t_0} \cdot \int_{t_0}^{t_1} P_j(V(t)) dt \quad (39)$$

ausformuliert liefert die Integration:

$$\overline{P_j} = \left[\frac{CI}{C2} \cdot \left[t + \frac{I}{C2} \cdot e^{-C2 \cdot (t-t_0)} \right] - \frac{V_0}{C2} \cdot e^{-C2 \cdot (t-t_0)} - V_{j,k-1} \cdot t \right] \cdot m_{j,k} + P_{j,k-1} \cdot t \Bigg|_{t_0}^{t_1} \quad (40)$$

Nach Einsetzen der Integrationsgrenzen und Zusammenfassen folgt schließlich:

$$\begin{aligned} \bar{P}_j = & P_{j,k-1} - m_{j,k} \cdot V_{j,k-1} + \\ & m_{j,k} \cdot \left[\frac{C1}{C2} + \left[1 - e^{-C2 \cdot (t_1 - t_0)} \right] \cdot \left[\frac{V_0}{(t_1 - t_0) \cdot C2} - \frac{C1}{(t_1 - t_0) \cdot C2^2} \right] \right] \end{aligned} \quad (41)$$

Die Zeit t_1 in Gleichung 41 ist entweder die Endzeit des aktuellen Zeitschrittes oder der Zeitpunkt, an dem eine Bereichsüberschreitung – also ein Wechsel der aktuellen Steigung $m_{j,k}$ - der Funktion $P_j(V(t))$ vorliegt. Zu welchem Zeitpunkt t_1 ein Bereichswechsel stattfindet, kann mit Hilfe von Gleichung 35 untersucht werden, indem für $V(t)$ bei einer Speicherinhaltsabnahme der Wert $V_{j,k-1}$ und bei einer Speicherinhaltszunahme der Wert $V_{j,k}$ eingesetzt und nach t_1 aufgelöst wird.

$$t_1 = -\frac{1}{C2} \cdot \ln \left[\frac{V(t) - \frac{C1}{C2}}{V_0 - \frac{C1}{C2}} \right] + t_0 \quad (42)$$

Ob im betrachteten Intervall eine Speicherinhaltszu- oder -abnahme stattfindet ist ebenfalls aus Gleichung 42 ersichtlich, indem als Standardfall (Speicherinhaltszunahme) zunächst für $V(t)$ der Wert $V_{j,k}$ eingesetzt wird. Der resultierende Wert für t_1 bestimmt die folgenden drei Fälle:

1. $t_1 > \Delta t$ (äußerer Zeitschritt)
Im betrachteten Zeitintervall findet kein Bereichswechsel statt, so daß mit Gleichung 41 gearbeitet werden kann.
2. $0 < t_1 < \Delta t$
Es findet im betrachteten Intervall ein Bereichswechsel nach der Zeit t_1 statt, die gleichzeitig die interne Zeitschrittlänge darstellt.
3. $t_1 < 0$
In Gleichung 42 wurde die falsche Grenze eingesetzt. Es muß eine nochmalige Berechnung mit $V_{j,k-1}$ anstelle von $V_{j,k}$ durchgeführt werden, da die Summe aller Belastungen ($C1$) kleiner ist als die Summe der ablaufenden Prozesse (P_j) und somit entgegen der Standardannahme eine Speicherinhaltsabnahme vorliegt.

Um mit Gleichung 42 auch die tatsächlich maßgebende Intervalllänge zu bestimmen, muß in einer Vorüberlegung zunächst der Wert $V_{j,k}$ gesucht werden, der von allen Prozessen P_j dem aktuellen Wert $V(t)$ am nächsten liegt (also der minimale Abstand bis zum nächsten Bereichswechsel).

Die maßgebende aktuelle Zeitschrittlänge folgt dann aus der Überlegung:

$$\Delta t_{\text{maßgebend}} = \min[(t - t_0), (t_{1,j} - t_0)] \quad (43)$$

Dieses $\Delta t_{\text{maßgebend}}$ wird nun in Gleichung 41 zur Berechnung der mittleren Prozeßraten verwendet. Sofern notwendig - also der äußere Zeitschritt noch nicht abgearbeitet ist - sind die Konstanten C1 und C2 nach Gleichung 33 neu zu bestimmen, um den restlichen Zeitschritt abzuarbeiten. Die resultierende Speicheränderung pro äußerem Δt wird durch Summation aller mittlerer Prozessraten P_j sowie aller Zeitreihen Z_i und anschließender Multiplikation mit Δt berechnet.

2.3 Berücksichtigung von zeitreihenabhängigen Prozessen bzw. als $f(t)$

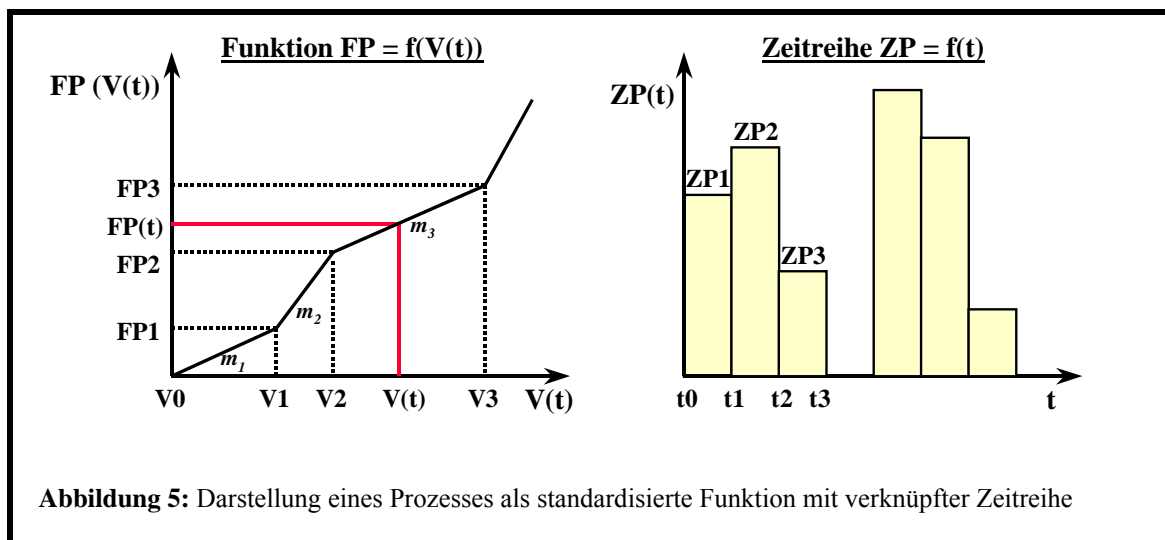
Das in 2.1 und 2.2 beschriebene Speicherkonzept bietet zwar alle erdenklichen Freiheiten bei der Formulierung von Übertragungsfunktionen, die vom Speicherinhalt und somit indirekt von der Zeit abhängig sind, eine Zeitabhängigkeit des Prozesse selbst, ohne Koppelung mit dem Speicherinhalt, ist allerdings noch nicht möglich. Hierzu wird im folgenden eine Methodik vorgestellt, die durch eine einfache Erweiterung des bisher dargelegten auch diesen Freiheitsgrad mit berücksichtigt.

Mit einem Ansatz nach Gleichung 44 ist ein Prozeß als eine multiplikative Koppelung einer standardisierten Prozeßfunktion FP_j mit einer externen Zeitreihe ZP_j möglich, wodurch er neben der Volumenabhängigkeit auch direkt als Funktion der Zeit darstellbar wird.

$$P_j(V(t), t) = ZP_j(t) \cdot FP_j(V(t)) \quad (44)$$

Nach Abbildung 5 ist z.B. der aktuelle Wert für $P_j(V(t))$ unter der Annahme, daß die Berechnung für das Zeitintervall $[t_2, t_3]$ erfolgt:

$$P(V(t), t) = ZP_3 \cdot [FP_2 + m_3 \cdot (V(t) - V_2)] \quad (45)$$



oder allgemein:

$$P_j(V(t), t) = ZP_m \cdot [FP_{j,k-1} + m_{j,k} \cdot (V(t) - V_{j,k-1})] \quad (46)$$

In vollkommener Analogie zu 2.2 Gleichung 31 erfolgt ein Ausmultiplizieren und Zerlegen in im Zeitintervall konstante und speicherinhaltsabhängige Anteile:

$$P_j(V(t), t) = ZP_m \cdot FP_{j,k-1} - ZP_m \cdot m_{j,k} \cdot V_{j,k-1} + ZP_m \cdot m_{j,k} \cdot V(t) \quad (47)$$

und nach Summation über die Laufvariable j:

$$\sum_{j=1}^{n_p} P_j(V(t), t) = \sum_{j=1}^{n_p} (ZP_m \cdot FP_{j,k-1} - ZP_m \cdot m_{j,k} \cdot V_{j,k-1}) + \sum_{j=1}^{n_p} (ZP_m \cdot m_{j,k}) \cdot V(t) \quad (48)$$

folgt nach Einsetzen in die Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{dV}{dt} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n_z} Z_i + \sum_{j=1}^{n_p} (ZP_m \cdot FP_{j,k-1} - ZP_m \cdot m_{j,k} \cdot V_{j,k-1})}_{C1} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n_p} (ZP_m \cdot m_{j,k}) \cdot V(t)}_{C3} \quad (49)$$

Substitution von C3 durch -C2 und Beachtung der oben genannten Vorzeichenkonvention ergibt wiederum die Arbeitsgleichung 34 mit der allgemeinen Lösung nach Gleichung 35.

Für die Berechnung der mittleren Prozeßrate gilt ebenfalls mit einigen kleineren Modifikationen das in 2.2 Erläuterte. Da per Definition alle ZP_m im aktuellen Zeitschritt konstant sind, können sie vor das Integral (Gleichung 39) gezogen werden. Wird nun noch $P_{j,k-1}$ durch $FP_{j,k-1}$ ersetzt, folgt für die mittlere Prozeßrate analog zu Gleichung 41:

$$\bar{P}_j = ZP_m \cdot \left[FP_{j,k-1} - m_{j,k} \cdot V_{j,k-1} + m_{j,k} \cdot \left[\frac{C1}{C2} + [1 - e^{-C2 \cdot (\Delta t_{ma\beta})}] \right] \cdot \left[\frac{V_0}{(\Delta t_{ma\beta}) \cdot C2} - \frac{C1}{(\Delta t_{ma\beta}) \cdot C2^2} \right] \right] \quad (50)$$

mit:

$$\Delta t_{ma\beta} = \min[(t - t_0), (t_{1,j} - t_0)] \quad (51)$$

3 Zusammenfassung

Ein quasi-nichtlineares Speicherkonzept der oben beschriebenen Art ermöglicht einerseits die gleichzeitige Berechnung mehrerer vom Speicherinhalt abhängiger Prozesse in einem Zeitintervall ohne aufwendige Iterationen, wenn die Speicherinhalts/Prozeß-Beziehungen bereichsweise linear darstellbar sind. Andererseits lassen sich durch die Verknüpfung externer Ereignisse (Zeitreihen) mit den Prozeßfunktionen Änderungen einzelner Prozesse als Funktion der Zeit ebenfalls berücksichtigen.

Damit ist aber auch prinzipiell die Simulation von Steuerungsvorgängen möglich, indem beispielsweise die externe mit einem Abfluß verknüpfte Zeitreihe pro Berechnungsintervall in Abhängigkeit einer anderen Zustandgröße neu ermittelt wird und somit die Übertragungsfunktionen eines Elementes nicht mehr ausschließlich von den eigenen Eigenschaften abhängen. Die veränderten Bedingungen treten nach diesem Konzept zwar erst mit der Verzögerung eines Zeitintervalls in Kraft, allerdings wiegt dieser Nachteil bei geeigneter Zeitschrittwahl den Vorteil der Vermeidung aufwendiger Iterationen nicht auf. Das den meisten hydrologischen Modellen zugrunde liegende Prinzip des *strikten Vorwärtsrechnens* mit den daraus resultierenden Vorteilen – Stabilität, Berechnungsdauer - kann aufrecht erhalten werden.